Chapitre N3 – Les Puissances

Méthode 1 : Utiliser les notations a^n et a^{-n}

À connaître

Pour tout nombre relatif a non nul et tout nombre entier n positif non nul :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}} \quad \text{et} \quad a^{-n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}} = \frac{1}{a^n}.$$

En particulier : $a^1 = a$ et $a^{-1} = \frac{1}{a}$. Par convention : $a^0 = 1$.

Exemple 1 : Donne l'écriture décimale des nombres : 2^4 et 10^{-3}.

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1\,000} = 0{,}001$.

Exemple 2 : Donne l'écriture décimale des nombres : $3^2 \times 3^3$ et $\frac{2^3}{2^5}$.

$3^2 \times 3^3 = (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3) = 3^5 = 243$

$\frac{2^3}{2^5} = \frac{2\times2\times2}{2\times2\times2\times2\times2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Méthode 2 : Appliquer les définitions pour des calculs simples

Exemple 1 : Donne l'écriture décimale du nombre $A = 4^3 + 250 \times 2^{-1} - 7$.

$A = 4^3 + 250 \times 2^{-1} - 7$

$A = 64 + 250 \times \frac{1}{2} - 7$ → On calcule les puissances, qui sont prioritaires, en utilisant leur définition.

$A = 64 + 125 - 7$ → On effectue ensuite la multiplication.

$A = 182$ → On termine par l'addition et la soustraction.

Exemple 2 : Donne l'écriture décimale du nombre $B = (3 - 1)^3 - (3 \times 4)^2$.

$B = (3 - 1)^3 - (3 \times 4)^2$

$B = 2^3 - 12^2$ → On effectue d'abord les calculs entre parenthèses.

$B = 2 \times 2 \times 2 - 12 \times 12$ → On applique la définition des puissances.

$B = 8 - 144$ → On effectue ensuite les multiplications prioritaires.

$B = -136$ → On termine par la soustraction.

Méthode 3 : Déterminer les signes des puissances...

À connaître

Pour tout nombre entier relatif n,
- Si a est **positif** alors a^n est **positif**.
- Si a est **négatif** alors a^n est **positif** lorsque l'**exposant** n est **pair**,
  et **négatif** lorsque l'**exposant** n est **impair**.

Exemple : Quel est le signe de A = $(-3)^4$ et de B = $(-2)^{-5}$?

- Comme – 3 est négatif et l'exposant 4 est pair, **A est un nombre positif**.
- Comme – 2 est négatif et l'exposant – 5 est impair, **B est un nombre négatif**.

Méthode 4 : Multiplier par une puissance de 10

À connaître

Pour tout nombre entier positif n :

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ facteurs}} = 1\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ zéros}} \ ; \ 10^{-n} = \underbrace{0{,}0\ldots0}_{n \text{ zéros}}1 \ \text{ et } \ 10^0 = 1 \ .$$

Multiplier un nombre par 10^n revient à décaler la virgule de **n rangs vers la droite** (on complète par des zéros si nécessaire).
Multiplier un nombre par 10^{-n} revient à décaler la virgule de **n rangs vers la gauche** (on complète par des zéros si nécessaire).

Remarque : **Multiplier** par 10^{-n} revient à **diviser** par 10^n.

Exemple 1 : Donne l'écriture décimale des nombres $208{,}641 \times 10^2$ et $37{,}1 \times 10^{-3}$.

$208{,}641 \times 10^2 = 208{,}641 \times 100 = 20\,864{,}1$	$37{,}1 \times 10^{-3} = 37{,}1 \times 0{,}001 = 0{,}037\,1$

Exemple 2 : Par combien faut-il multiplier 7,532 pour obtenir 75 320 ; par combien faut-il multiplier 7 pour obtenir 0,007 ?

- Pour passer de 7,532 à 75 320, on décale la virgule de 4 rangs à droite donc il faut multiplier 7,532 par 10^4 pour obtenir 75 320.
- Pour passer de 7 à 0,007, on décale la virgule de 3 rangs vers la gauche donc il faut multiplier 7 par 10^{-3} pour obtenir 0,007.

Méthode 5 : Appliquer les règles sur les puissances de 10

À connaître

Pour tous nombres entiers relatifs m et p :

$10^m \times 10^p = 10^{m+p}$	règle du **produit** de deux puissances de 10
$\dfrac{10^m}{10^p} = 10^{m-p}$	règle du **quotient** de deux puissances de 10
$\left(10^m\right)^p = 10^{m \times p}$	règle des **puissances** de puissance de 10

Exemple 1 : Donne l'écriture décimale du nombre A = $10^4 \times 10^3$.

A = $10^4 \times 10^3 = 10^{4+3} = 10^7 = 10\,000\,000$

Exemple 2 : Écris le nombre $B = \dfrac{10}{10^{-3}}$ sous la forme d'une seule puissance de 10.

$B = \dfrac{10^1}{10^{-3}}$	$\longrightarrow$	On remarque que $10 = 10^1$.
$B = 10^{1-(-3)}$ $B = 10^{1+3}$	$\longrightarrow$	On applique la règle du quotient de deux puissances de 10 (attention aux signes moins !).
$B = 10^4$	$\longrightarrow$	On donne l'écriture demandée par l'énoncé.

Méthode 6 : Écrire en notation scientifique

À connaître

Tout nombre décimal non nul peut être écrit en **notation scientifique**, c'est-à-dire sous la forme **$a \times 10^n$**, où a est un nombre décimal dont la distance à zéro est comprise entre 1 et 10 (10 exclu), c'est à dire **ayant un seul chiffre non nul avant la virgule,** et où n est un nombre **entier relatif**.
Le nombre a est appelé : **mantisse**.

Exemple : Écris le nombre A = 6 430 en notation scientifique.

A = **6 430**		
A = 6,43 × $\mathbf{10^3}$	$\longrightarrow$	On déplace la virgule de manière à obtenir un nombre ayant un seul chiffre non nul avant la virgule puis on multiplie par la puissance de 10 de manière à avoir égalité.

L'écriture scientifique de A est donc **6,43** × $\mathbf{10^3}$.

Méthode 7 : Multiplier ou diviser avec des puissances de 10

À connaître

Dans un calcul ne comportant que des multiplications et divisions, on **regroupe** les nombres écrits sous la forme de **puissances de 10** d'un côté et **les autres nombres** de l'autre côté puis on calcule avec les règles habituelles.

Exemple :

Donne l'écriture décimale du nombre $A = \frac{14 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^{6}}{2 \times 10^{4}}$.

$A = \frac{14 \times 5}{2} \times \frac{10^{-3} \times 10^{6}}{10^{4}}$ ⟶ On regroupe les puissances de 10.

$A = 35 \times \frac{10^{-3+6}}{10^{4}}$ ⟶ On calcule l'écriture fractionnaire et on applique la règle du produit de deux puissances de 10 (voir la méthode 5).

$A = 35 \times \frac{10^{3}}{10^{4}}$

$A = 35 \times 10^{3-4}$ ⟶ On applique la règle du quotient de deux puissances de 10 (voir la méthode 5).

$A = 35 \times 10^{-1}$

$A = 3{,}5$ ⟶ On donne l'écriture demandée par l'énoncé.

L'écriture décimale de A est donc **3,5**.

Méthode 8 : Comparer en utilisant l'écriture scientifique

À connaître

Pour **comparer** deux nombres, on peut comparer leurs **ordres de grandeur** à l'aide de leurs **écritures scientifiques**.
En cas d'égalité des exposants, on compare alors les mantisses.

Exemple : Compare $A = 1{,}7 \times 10^{3}$ et $B = 2{,}5 \times 10^{-2}$ puis compare $C = 12{,}4 \times 10^{3}$ et $D = 3{,}1 \times 10^{4}$.

- L'ordre de grandeur de A est 10^{3} alors que B est de l'ordre de 10^{-2}. Donc **A > B**.

- On écrit C en notation scientifique : $C = 1{,}24 \times 10 \times 10^{3} = 1{,}24 \times 10^{4}$.

  L'ordre de grandeur de C est donc 10^{4} tout comme l'ordre de grandeur de D.

  Mais comme $1{,}24 < 3{,}1$, alors $1{,}24 \times 10^{4} < 3{,}1 \times 10^{4}$ et donc **C < D**.