CALCUL NUMERIQUE

1) ENSEMBLE DES NOMBRES

A) DEFINITIONS ET NOTATIONS

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **nombres entiers naturels** . $\mathbb{N} = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , ... \}$
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **nombres entiers relatifs** **(ou *nombres entiers*)** $\mathbb{Z} = \{ ... , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , ... \}$
- **D** est l'ensemble des **nombres décimaux** . (nombres s'écrivant $n \times 10^{p}$ avec n et p dans $\mathbb{Z}$)

  Exemple : $26 \times 10^{-é} = 0,26$; $-7 \times 10^{4} = -70000$
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des **nombres rationnels** . (nombres que l'on peut écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, p étant un nombre entier et q un entier non nul)

  Exemple : $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $-\frac{5}{7}$
- On appelle **nombre irrationnel** tout nombre que l'on ne peut pas écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, p étant un nombre entier et q un entier non nul)

  Exemple : $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, π
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des **nombres réels** , c'est à dire qui sont soit rationnels, soit irrationnels.

B) SYMBOLES D'INCLUSION

Soit A et B deux ensembles :

$A \subset B$ se lit : " A est **inclus** dans B " , " A est **contenu** dans B " ou " A est **une partie** de B "
$A \subset B$ signifie que tout élément de l'ensemble A appartient à l'ensemble B.

Si A n'est pas inclus dans B on note : $A \not\subset B$

Exemple : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbf{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$ car par exemple $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$

2) RAPPELS

A) PRODUITS

Soit a , b , c et d des réels :

REGLE DES SIGNES	• $a \times (-b) = (-a) \times b = -ab$ • $(-a) \times (-b) = ab$
PRODUIT NUL	Dire qu'un produit est nul signifie que l'un des facteurs au moins est nul
SIMPLIFICATION	$ac = bc$ et $c \neq 0 \Rightarrow a = b$
DISTRIBUTIVITE	• $c\,(a+b) = ca + cb$ • $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
PRODUITS REMARQUABLES	• $(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$ • $(a-b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$ • $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

B) QUOTIENTS

Soit a , b , c et d des réels avec c et d non nuls :

GENERALITES	$\frac{a}{1} = a$; $\frac{0}{c} = 0$; $\frac{a}{0}$ est impossible
REGLE DES SIGNES	$\frac{-a}{c} = \frac{a}{-c} = -\frac{a}{c}$; $\frac{-a}{-c} = \frac{a}{c}$
SIMPLIFICATION	$\frac{ad}{cd} = \frac{a}{c}$ **Attention :** $\frac{a+d}{c+d} \neq \frac{a}{c}$

EGALITE	$\frac{a}{c}=0 \Leftrightarrow a=0$; $\frac{a}{c}=\frac{b}{d} \Leftrightarrow ad=bc$
ADDITION	$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$; $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{ad+bc}{cd}$
MULTIPLICATION	$\frac{a}{c}\times\frac{b}{d}=\frac{ab}{cd}$
DIVISION	$\frac{1}{\frac{c}{d}}=\frac{d}{c}$; $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$ (avec $b\neq 0$) ; $\frac{a}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{c}$; $\frac{\frac{a}{c}}{d}=\frac{a}{cd}$

C) PUISSANCES

Soit a et b des réels et p et q des entiers :

DEFINITION	$a^0=1$; $a^p=a\times a\times\ldots\times a$ (p facteurs , $p\geq 1$) ; $a^1=a$ $a^{-p}=\frac{1}{a^p}$; $a^{-1}=\frac{1}{a}$ ($a\neq 0$)
SIGNE	Pour p pair $(-a)^p=a^p$ et pour p impair $(-a)^p=-a^p$
REGLES DE CALCUL	Pour a et b non nuls : $a^p\times a^q=a^{p+q}$; $\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$; $(a^p)^q=a^{pq}=(a^q)^p$ $(ab)^p=a^p\times b^p$; $\left(\frac{a}{b}\right)^p=\frac{a^p}{b^p}$
NOTATION SCIENTIFIQUE	La notation scientifique d'un nombre décimal est de la forme $a\times 10^p$ où a est un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule et p est un entier. **Exemple :** 0,0452 = $4{,}52\times 10^{-2}$; 12478 = $1{,}2478\times 10^{4}$

D) RACINES CARREES

DEFINITION	Lorsque a est un nombre positif , $\sqrt{a}$ désigne l'unique nombre positif dont le carré est égal à a . **Attention:** un nombre négatif n'a pas de racine carrée.
REGLES DE CALCUL	Pour a et b positif : $\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2=a$; $\sqrt{a^p}=(\sqrt{a})^p$ (p entier naturel) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$; $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ($b\neq 0$)
MISE EN GARDE	• Il n'existe pas de relation simple entre $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ • Si $a<0$ alors $\sqrt{a^2}=-a$
EQUATION $x^2=a$	Soit a un réel , l'équation $x^2=a$ • n'admet pas de solution si $a<0$ • admet une unique solution 0 si $a=0$ • admet deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ si $a>0$