TS **Devoir Surveillé n ° 4**

- Durée 2 h
- Calculatrices de lycée autorisées

Barème : 1) *6 pts* 2) *11 pts* 3) *3 pts*	**Nom :**

Commentaires : *Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées . Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . Soyez propre et clair .*

Ex 1 : *BAC S centre étrange juin 2009*

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, on pourra donner un contre-exemple.

1. Pour tout complexe z, $\mathrm{Re}\left(z^2\right) = (\mathrm{Re}(z))^2$.
2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   Pour tout nombre complexe z non nul, les points M d'affixe z, N d'affixe $\overline{z}$ et P d'affixe $\dfrac{z^2}{\overline{z}}$ appartiennent à un même cercle de centre O.
3. Pour tout nombre complexe z, si $|1 + \mathrm{i}z| = |1 - \mathrm{i}z|$, alors la partie imaginaire de z est nulle.

Aide : Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$ et $AB = |z_B - z_A|$

Ex 2 : *BAC S France septembre 2006*

Dans tout l'exercice, λ désigne un nombre réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$.

1. On se propose d'étudier les fonctions dérivables sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$ vérifiant l'équation différentielle $(\mathrm{E}_\lambda) : y' = y^2 + \lambda y$ et la condition $y(0) = 1$.
   On suppose qu'il existe une solution y_0 de (E_λ) strictement positive sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$ et on pose sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$: $z = \dfrac{1}{y_0}$
   Écrire une équation différentielle simple satisfaite par la fonction z.
2. **Question de cours**
   PRÉ-REQUIS
   Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\lambda x}$ où C est une constante réelle.
   a. Démontrer l'existence et l'unicité de la solution z de l'équation différentielle $(\mathrm{E'}_\lambda) : z' = -(\lambda z + 1)$ telle que $z(0) = 1$.
   Aide : Poser $u = \lambda z + 1$ …
   b. Donner l'expression de cette fonction que l'on notera z_0.

   On veut maintenant montrer que la fonction z_0 ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$.
3. **a.** Démontrer que $\ln(1 + \lambda) > \dfrac{\lambda}{\lambda + 1}$.
   On pourra étudier sur $[0\,;\,1]$ *la fonction f définie par* $f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{x+1}$.
   b. En déduire que $\dfrac{1}{\lambda}\ln(1 + \lambda) > \dfrac{1}{2}$.
4. En déduire que la fonction z_0 ne s'annule pas sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$.
   Démontrer alors que (E_λ) admet une solution strictement positive sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$ que l'on précisera.

Ex 3 : Calculs de limites … à justifier bien sûr ☺

A) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{\sin x}$ **B)** $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x - 1}\right)$

Correction :

Ex 1 :

1. Si $z = x + \mathrm{i}y$, alors $z^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$.
   Alors $\mathrm{Re}\left(z^2\right) = x^2 - y^2$ et $(\mathrm{Re}(z))^2 = x^2$.
   La proposition est fausse.
2. Les trois points appartiennent à un même cercle de centre si et seulement si leur modules sont égaux.
   Or $\left|\overline{z}\right| = |z|$ et $\left|\dfrac{z^2}{\overline{z}}\right| = \dfrac{\left|z^2\right|}{\left|\overline{z}\right|} = \dfrac{|z|^2}{|z|} = |z|$.
   La proposition est vraie.
3. On a $|1 + \mathrm{i}z| = |1 - \mathrm{i}z| \iff |\mathrm{i}z - (-1)| = |\mathrm{i}z - 1|$ qui signifie que le point d'afixe $\mathrm{i}z$ est équidistant des points d'affixe 1 et -1. Ces points étant sur l'axe des abscisses et symétriques autour de O, il en résulte que le point d'affixe $\mathrm{i}z$ est sur l'axe des ordonnées, ou encore $\mathrm{i}z = \mathrm{i}\alpha (\alpha \in \mathbb{R}) \iff z = \alpha$.
   La proposition est vraie.

Ex 2 :

1. Si sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$, $y_0 > 0$, alors $z = \dfrac{1}{y_0}$ existe (et $z > 0$). En dérivant $z = \dfrac{1}{y_0}$, on obtient :
   $z' = -\dfrac{y_0'}{y_0^2}$. Or par définition $y_0' = y_0^2 + \lambda y_0$, donc :
   $z' = -\dfrac{y_0^2 + \lambda y_0}{y_0^2} = -1 - \lambda\dfrac{1}{y_0} = -1 - \lambda z$.
   De plus $y(0) = 1 \Rightarrow z(0) = \dfrac{1}{y(0)} = 1$.
   Conclusion z est solution de l'équation différentielle : $\left\{\begin{array}{lcl} z' & = & -1 - \lambda z \\ z(0) & = & 1 \end{array}\right.$
2. **a.** Cours : posons $u = \lambda z + 1$; u est dérivable et $u' = \lambda z' = -\lambda(\lambda z + 1)$ (z solution de l'équation différentielle).
   Donc $u' = -\lambda u$ et d'après le pré-requis les fonctions u solution de cette dernière équation différentielle sont de la forme : $u(x) = C\mathrm{e}^{-\lambda x} = \lambda z + 1 \iff \lambda z = C\mathrm{e}^{-\lambda x} - 1 \iff z = \dfrac{C}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x} - \dfrac{1}{\lambda}$ (car $\lambda \neq 0$).
   De plus $z(0) = \dfrac{C}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda} = 1 \iff C - 1 = \lambda \iff C = 1 + \lambda$.

   Ceci montre l'existence et l'unicité de la fonction z_0.

   b. Donc $z_0(x) = \dfrac{1+\lambda}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x} - \dfrac{1}{\lambda}$.
3. **a.** Soit f définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{x+1}$. f somme de fonctions dérivables est dérivable et $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1+x-x}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{1+x-1}{(1+x)^2} = \dfrac{x}{(1+x)^2}$ qui est un quotient de nombres supérieurs à zéro

quel que soit $x \in]0 ; 1]$.
La dérivée étant positive, la fonction f est croissante sur $]0 ; 1]$.
Comme $\lim_{x \to 0_+} f(x) = 0$, il en résulte que $f(x) > 0$ sur $]0 ; 1]$. Donc
$\ln(1+x) - \dfrac{x}{x+1} > 0 \iff \ln(1+x) > \dfrac{x}{x+1}$.
En particulier comme $0 < \lambda \leqslant 1$, $\ln(1+\lambda) > \dfrac{\lambda}{\lambda+1}$.

b. On a $\ln(1+\lambda) > \dfrac{\lambda}{\lambda+1} \iff \dfrac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda) > \dfrac{1}{\lambda+1}$ (1).
Or $0 < \lambda \leqslant 1 \iff 1 < \lambda+1 \leqslant 2 \iff \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{\lambda+1}$ (2).
En comparant (1) et (2), on en déduit que $\dfrac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda) > \dfrac{1}{2}$.

4. On a $z_0(x) = 0 \iff \dfrac{1+\lambda}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x} - \dfrac{1}{\lambda} = 0 \iff \mathrm{e}^{-\lambda x} = \dfrac{1}{1+\lambda} \iff -\lambda x = \ln\left(\dfrac{}{1+\lambda}\right) \iff$
$\lambda x = \ln(1+\lambda) \iff x = \dfrac{\ln(1+\lambda)}{\lambda} > \dfrac{1}{2}$ d'après la question précédente.
Conclusion la fonction z_0 ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]-\infty ; \dfrac{1}{2}\right[$.
La fonction z_0 est continue et garde donc un signe constant sur $\left]-\infty ; \dfrac{1}{2}\right[$.
Comme $z_0(0) = 1 > 0$, il en résulte que la fonction z_0 est supérieure à zéro sur l'intervalle $\left]-\infty ; \dfrac{1}{2}\right[$.
La fonction $y_0 = \dfrac{1}{z_0}$ existe donc, est positive comme inverse d'une fonction positive sur $\left]-\infty ; \dfrac{1}{2}\right[$ et peut s'écrire :

$$y_0 = \frac{\lambda}{(1+\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda x} - 1}.$$

<u>**Ex 3 :**</u> Calcul de limites

A) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x} = \ldots = 1$ **B)** $\lim_{x \to 0^+} \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\right) = .. = +\infty$

Ex 63 et 64 du livre !!!

Pour chacune des cinq affirmations ci-dessous,préciser si elle est vraie ou fausse.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la mention «vrai » ou «faux ».
Une réponse correcte rapporte