1 ^{ère} S **Devoir Surveillé n ° 5** - Durée 1h - Calculatrices de lycée autorisées	**Barème :** **1)** *5,5 (+ bonus de 1,5) pts* **2)** *3 pts* **3)** *4,5 pts* **4)** *4 pts* **5)** *3 pts*	**Nom :**

Commentaires : *Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées . Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . Soyez propre et clair .*

APPLICATION DU PRODUIT SCALAIRE

Ex 1 : Le cercle d'Euler

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points A (6 ; 0), B (0; 6) et C (– 3 ; 0)

1) Faire une figure . Cette figure est à compléter tout au long de l'exercice.

2) On note A', B' et C' les milieux respectifs de [BC] , [CA] et [AB] .

a) Déterminer « rapidement » une équation de la médiatrice d de [A'C'] et montrer que la médiatrice d' de [B'C'] a pour équation $x + 2y - \frac{21}{4} = 0$

b) En déduire q'une équation du cercle $\mathcal{C}'$de centre O' circonscrit au triangle A'B'C' est $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{45}{8}$

3) On note P, Q et R les projetés orthogonaux de A, B et C respectivement sur [BC], [CA] et [AB].

a) Démontrer que Q est un point de $\mathcal{C}'$.

b) Déterminer les coordonnées de R et démontrer que R est un point de $\mathcal{C}'$.

On peut démontrer (de la même façon que pour R) que P est un point de $\mathcal{C}'$. (à ne pas faire)

4) On note H l'orthocentre du triangle ABC et I, J et K les milieux respectifs de [HA], [HB] et [HC].
Vérifier que I est un point de $\mathcal{C}'$.

On peut démontrer (de la même façon que pour I) que J et K sont des points de $\mathcal{C}'$. (à ne pas faire)

5) On note Ω le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC et G le centre de gravité de ABC.
Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\Omega G}$, $\overrightarrow{\Omega H}$ et $\overrightarrow{\Omega O'}$.
Que peut-on dire des points O' , H , Ω et G ?

Ex 2 :

ABC est un triangle tel que $\sin \widehat{B} = 2 \sin \widehat{C} \times \cos \widehat{A}$

a) Démontrer que $AC = 2\, AB \times \cos \widehat{A}$

b) En déduire que le triangle ABC est isocèle en B.

DERIVATION - APPLICATION DE LA DERIVATION

Ex 3 :

Sans étudier l'ensemble de définition, ni la dérivabilité, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = \frac{x^2 - 2}{2 + x^2}$ $\qquad g(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ $\qquad h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4 - 2x}$

Ex 4 :

Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{5}{2} ; 2\right]$ par $f : x \longmapsto -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 7$

1) Etudier les variations de f

2) Déterminer le meilleur encadrement possible de f (x) sur $\left[-\frac{5}{2} ; 2\right]$

3) Déterminer le meilleur encadrement possible de | f (x) | sur $\left[-\frac{5}{2} ; 2\right]$

Ex 5 :

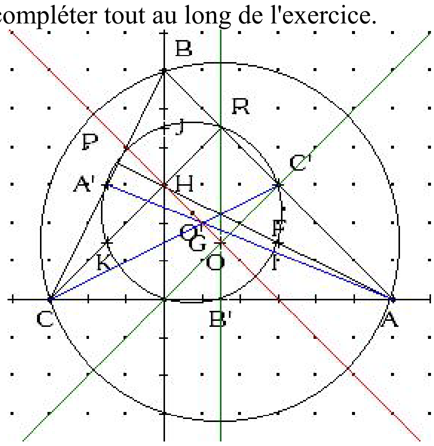
Soit les fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{1}{1+x} - 2x + 3$ et $g(x) = 4 - 3x$

Comparer les fonctions f et g

Correction

APPLICATION DU PRODUIT SCALAIRE

Ex 1 : **Le cercle d'Euler**
Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points A (6 ; 0), B (0; 6) et C (– 3 ; 0)
1) Faire une figure . Cette figure est à compléter tout au long de l'exercice.



2) On note A', B' et C' les milieux respectifs de [BC] , [CA] et [AB] .
a) Déterminer « rapidement » une équation de la médiatrice d de [A'C'] et montrer que la médiatrice d' de [B'C'] a pour équation $x + 2y - \frac{21}{4} = 0$

b) En déduire q'une équation du cercle *C'* de centre O' circonscrit au triangle A'B'C' est $(x - \frac{3}{4})^2 + (y - \frac{9}{4})^2 = \frac{45}{8}$

On a A' $(-\frac{3}{2} ; 3)$, B' $(\frac{3}{2} ; 0)$ et C' (3 ; 3) .

La médiatrice d de [A'C'] a pour équation : $x = \frac{3}{4}$ (évident A' et C' ont la même ordonnée)

Le milieu de [B'C'] a pour coordonnées $(\frac{9}{4} ; \frac{3}{2})$ et $\overrightarrow{B'C'}$ $(\frac{3}{2} ; 3)$ (... qui est colinéaire à $\vec{u}$ (1 ; 2))

Ainsi la médiatrice d' de [B'C'] a une équation de la forme $x + 2y + c = 0$ (où $c \in \mathbb{R}$)

De plus d' passe par le milieu de [B'C'] ... on trouve $c = -\frac{21}{4}$

Ainsi d' : $x + 2y - \frac{21}{4} = 0$

O' est le point d'intersection de d et d' : ainsi ... O' $(\frac{3}{4} ; \frac{9}{4})$

D'autre part $\overrightarrow{O'B'}$ a pour coordonnées $(\frac{3}{4} ; -\frac{9}{4})$

Ainsi , $O'B'^2 = ... = \frac{90}{16} = \frac{45}{8}$

Le cercle *C'* a donc pour équation :
$(x - \frac{3}{4})^2 + (y - \frac{9}{4})^2 = \frac{45}{8}$

3) On note P, Q et R les projetés orthogonaux de A, B et C respectivement sur [BC], [CA] et [AB].
a) Démontrer que Q est un point de *C'*
Q = O et O ∈ C'
b) Déterminer les coordonnées de R et démontrer que R est un point de *C'*
On trouve ... (AB) : $x + y - 6 = 0$ et ... (CR) : $x - y + 3 = 0$

R est le point d'intersection de ces deux droites et donc ... R $(\frac{3}{2} ; \frac{9}{2})$

$(\frac{3}{2} - \frac{3}{4})^2 + (\frac{9}{2} - \frac{9}{4})^2 = ... = \frac{45}{8}$
Donc R ∈ *C'*

On peut démontrer (de la même façon que pour R) que P est un point de *C'*. (à ne pas faire)

4) On note H l'orthocentre du triangle ABC et I, J et K les milieux respectifs de [HA], [HB] et [HC].
Vérifier que I est un point de *C'*.
On peut démontrer (de la même façon que pour I) que J et K sont des points de *C'*. (à ne pas faire)

On obtient ... I (3 ; $\frac{3}{2}$) et les coordonnées de I vérifient l'équation de C'.

5) On note Ω le centre du cercle *C* circonscrit au triangle ABC et G le centre de gravité de ABC.
Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\Omega G}$, $\overrightarrow{\Omega H}$ et $\overrightarrow{\Omega O'}$.
Que peut-on dire des points O' , H , Ω et G ?
On obtient ... G (1 ; 2) (Il suffit d'appliquer la formule)

La médiatrice de [AB] a pour équation x – y = 0 et celle de [AC] a pour équation x = $\frac{3}{2}$

On obtient ... $\Omega\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ et ... $\overrightarrow{\Omega G}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{\Omega H}\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{\Omega O'}\left(-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right)$

On a $\overrightarrow{\Omega H} = 3\,\overrightarrow{\Omega G}$ et $\overrightarrow{\Omega H} = 2\,\overrightarrow{\Omega O'}$.
On en déduit que O' , H , Ω et G sont alignés.

<u>Ex 2 :</u>

ABC est un triangle tel que $\sin\widehat{B} = 2\sin\widehat{C} \times \cos\widehat{A}$

a) Démontrer que AC = 2 AB × $\cos\widehat{A}$

$\frac{AC}{\sin\widehat{B}} = \frac{AB}{\sin\widehat{C}}$ ...

b) En déduire que le triangle ABC est isocèle en B.
D'après le théorème d'Al Kashi, on a:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AC \times AB \times \cos\widehat{A} = AB^2 + AC^2 - AC \times AC = AB^2$ ...

<u>DERIVATION - APPLICATION DE LA DERIVATION</u>

<u>Ex 3 :</u>

Sans étudier l'ensemble de définition, ni la dérivabilité, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = \frac{x^2-2}{2+x^2}$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ $\qquad$ $h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4-2x}$

$f'(x) = \frac{8x}{(2+x^2)^2}$ $\qquad$ $g'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$ $\qquad$ $h'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{4-2x}}$

<u>Ex 4 :</u>

Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{5}{2};2\right]$ par $f : x \longmapsto -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 7$

1) Etudier les variations de f

2) Déterminer le meilleur encadrement possible de f (x) sur $\left[-\frac{5}{2};2\right]$

3) Déterminer le meilleur encadrement possible de | f (x) | sur $\left[-\frac{5}{2};2\right]$

(transmath :45 p 103)

f est dérivable sur $\mathrm{I} = \left[-\frac{5}{2} \,;\, 2\right]$ et pour tout x de I,

$f'(x) = -x^3 + 4x = x(4 - x^2) = x(2 - x)(2 + x)$.

On en déduit les variations de f sur I :

x	$-\frac{5}{2}$		-2		0		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0
f	$-\frac{273}{64}$	↗	-3	↘	-7	↗	-3

D'après les variations de f, si $x \in \mathrm{I}$, alors $-7 \leqslant f(x) \leqslant -3$ donc $0 \leqslant |f(x)| \leqslant 7$

Ainsi si $x \in \mathrm{I}$, $0 \leqslant \left|-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 3\right| \leqslant 7$

<u>Ex 5</u> :

Soit les fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{1}{1+x} - 2x + 3$ et $g(x) = 4 - 3x$

Comparer les fonctions f et g

(transmath : 32 p 105)

$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ et $D_g = \mathbb{R}$

Pour tout $x \neq -1$, on pose :

$d(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x}$

L'étude du signe de d (x) est immédiate . INUTILE de faire un tableau de signe !

…